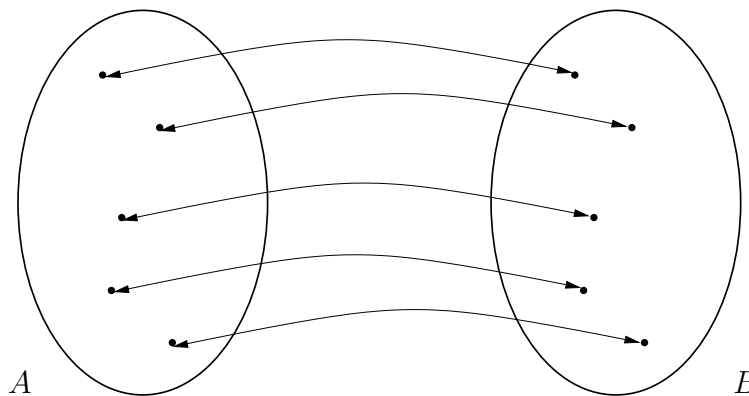


Übungsaufgaben – Blatt 2

Zürich, 9. November 2005

Zusammenfassung

Zwei Mengen A und B sind gleich gross (haben die gleich Anzahl von Elementen), wenn man ihre Elemente paaren kann.



„Paaren“ bedeutet hier, dass jedes Element aus B genau einem Partnerelement aus A zugewiesen wird und umgekehrt, und dass keine Elemente übrig bleiben (also alle „verheiratet“ sind).

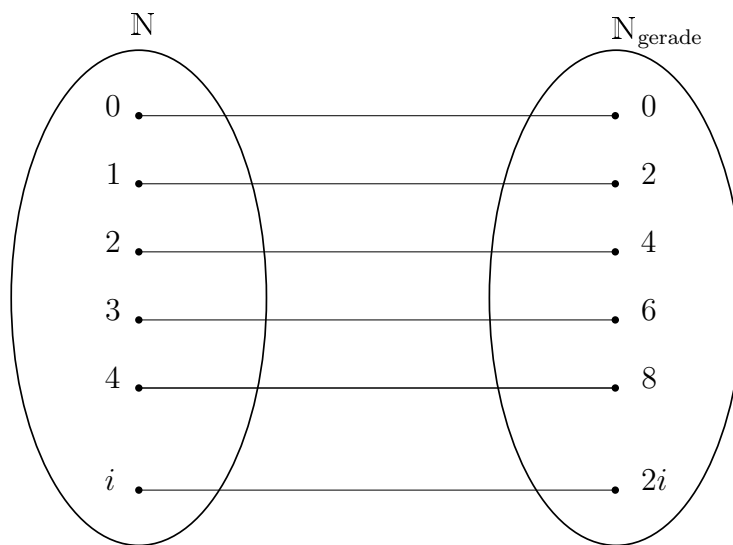
Zum Beispiel sind die Menge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

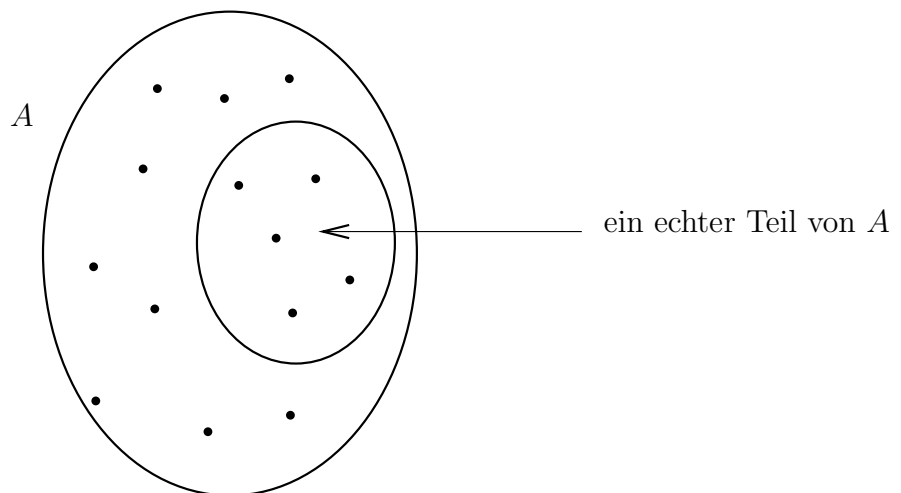
aller natürlichen Zahlen und die Menge

$$\mathbb{N}_{\text{gerade}} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

aller geraden natürlichen Zahlen gleich gross, weil es die folgende Paarung gibt:



Eine Menge A ist unendlich, wenn es einen echten Teil von A gibt, der im obigen Sinne die gleiche Grösse (genauso viele Elemente) wie A selbst hat.



Aufgaben

Ihre Lösungen zu den Aufgaben können Sie entweder persönlich bei der Open-Class-Veranstaltung am 16. November 2005 abgeben oder bis zum 16. November per E-Mail (möglichst als PDF-Datei) an hjb@inf.ethz.ch oder per Post an folgende Adresse schicken:

Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
Informationstechnologie und Ausbildung
ETH Zentrum CAB F 11.1
Universitätsstrasse 6
8092 Zürich

Bitte vergessen Sie nicht, Ihre Lösung mit Ihrem Namen und Ihrer E-Mail-Adresse zu versehen.

Aufgabe 5

Das Hilbertsche Hotel wird von 10 Personen aufgesucht, jedoch sind alle unendlich vielen Zimmer des Hotels bereits voll belegt. Was tun Sie, um den 10 Personen Unterkunft zu gewähren? **10 Punkte**

Aufgabe 6

Das Hilbertsche Hotel ist halbvoll: Alle Zimmer mit geraden Nummern (0, 2, 4, 6, ...) sind belegt, und die Zimmer mit ungeraden Nummern (1, 3, 5, 7, ...) sind frei. Nun treffen zwei unendlich lange Busse ein, deren Plätze nummeriert sind (mit den Zahlen 0, 1, 2, ...). Wir können also Passagiere aus dem ersten Bus als

$$B1.0, B1.1, B1.2, B1.3, \dots$$

bezeichnen und solche aus dem zweiten Bus als

$$B2.0, B2.1, B2.2, B2.3, \dots$$

Wie kann man vorgehen, um allen Gästen Unterkunft zu gewähren? **10 Punkte**

Aufgabe 7

Wir betrachten zwei Mengen. Es sei $A := [0, 1]$ die Menge aller reellen Zahlen, die grösser-gleich null und kleiner-gleich eins sind. Ferner sei $B := [0, 10]$ die Menge aller reellen Zahlen, die grösser-gleich null und kleiner-gleich zehn sind. Wie zeigt man, dass $|A| = |B|$ gilt, d. h. dass die Mengen A und B gleich gross sind (also „genauso viele Elemente haben“)? **10 Punkte**

Knobel-Aufgabe

Bonus-Aufgabe 2

Das ständige Zügeln im Hilbertschen Hotel ist lästig, insbesondere während der Nächte. Deswegen schickt der Hotel-Manager am späten Nachmittag jeden Gast aus dem Zimmer i in das Zimmer $2 \cdot i$ und versichert allen Gästen, dass in der Nacht keine Umzüge stattfinden werden. Der Portier weiss also, dass alle Zimmer mit ungeraden Nummern vakant sind. Welche Art von Unterbringungsstrategie kann er anwenden, so dass

- a. alle Gäste, die während der Nacht eintreffen eine Einzelzimmer-Unterkunft erhalten, unabhängig davon, wie viele Gäste bzw. wie häufig Gruppen von wie vielen Gästen auch immer eintreffen; und
- b. kein Gast, dem einmal ein Zimmer zugewiesen wurde, je wieder zum Zügeln aufgefordert werden wird.

10 Bonus-Punkte