

Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben – Blatt 1

Zürich, 9. November 2005

Lösung zu Aufgabe 2

Wir wollen die Arbeit des folgenden Programms analysieren:

Eingabe: a, b, c

1. Lese ein in Register(1)
2. Lese ein in Register(2)
3. Lese ein in Register(3)
4. Register(4) \leftarrow Register(1) + Register(2)
5. Register(4) \leftarrow Register(3) + Register(4)
6. Register(5) \leftarrow 3
7. Register(6) \leftarrow Register(4) / Register(5)
8. Ausgabe \leftarrow Register(6)
9. Ende

Das Programm berechnet den Mittelwert (arithmetisches Mittel) $\frac{a+b+c}{3}$ der drei eingegebenen Zahlen a , b und c auf die folgende Weise:

In den ersten drei Zeilen des Programms werden die drei Zahlen aus der Eingabe eingelesen, a in Register 1, b in Register 2 und c in Register 3.

In den Zeilen 4 und 5 wird schrittweise die Summe der drei Eingabewerte in Register 4 berechnet: Nach Zeile 4 steht zunächst die Summe $a + b$ in Register 4, in Zeile 5 wird dann noch c hinzuaddiert.

Die Zeilen 6 und 7 berechnen dann das arithmetische Mittel $\frac{a+b+c}{3}$ in Register 6. Dafür wird in Zeile 6 zunächst die Konstante 3 in Register 5 geladen; in Zeile 7 wird dann der Wert $a + b + c$ aus Register 4 durch den Wert 3 aus Register 5 geteilt und das Ergebnis nach Register 6 gespeichert.

Dieses Ergebnis wird dann in Zeile 8 auf die Ausgabe geschrieben, Zeile 9 beendet das Programm.

Die folgende Tabelle fasst noch einmal die Inhalte der Register sowie der Eingabe und Ausgabe nach den einzelnen Schritten des Programms zusammen:

	Inhalt nach Ausführung von Zeile								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Eingabe	b, c	c							
Register 1	a	a	a	a	a	a	a	a	a
Register 2		b	b	b	b	b	b	b	b
Register 3			c	c	c	c	c	c	c
Register 4				$a + b$	$a + b + c$	$a + b + c$	$a + b + c$	$a + b + c$	$a + b + c$
Register 5						3	3	3	3
Register 6							$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{a+b+c}{3}$
Ausgabe							$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{a+b+c}{3}$

Lösung zu Aufgabe 3

Der folgende Algorithmus berechnet für vier gegebene Zahlen a, b, c, x den Wert $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, speichert ihn im Register 10 ab und gibt ihn als Ausgabe aus:

Eingabe: a, b, c, x

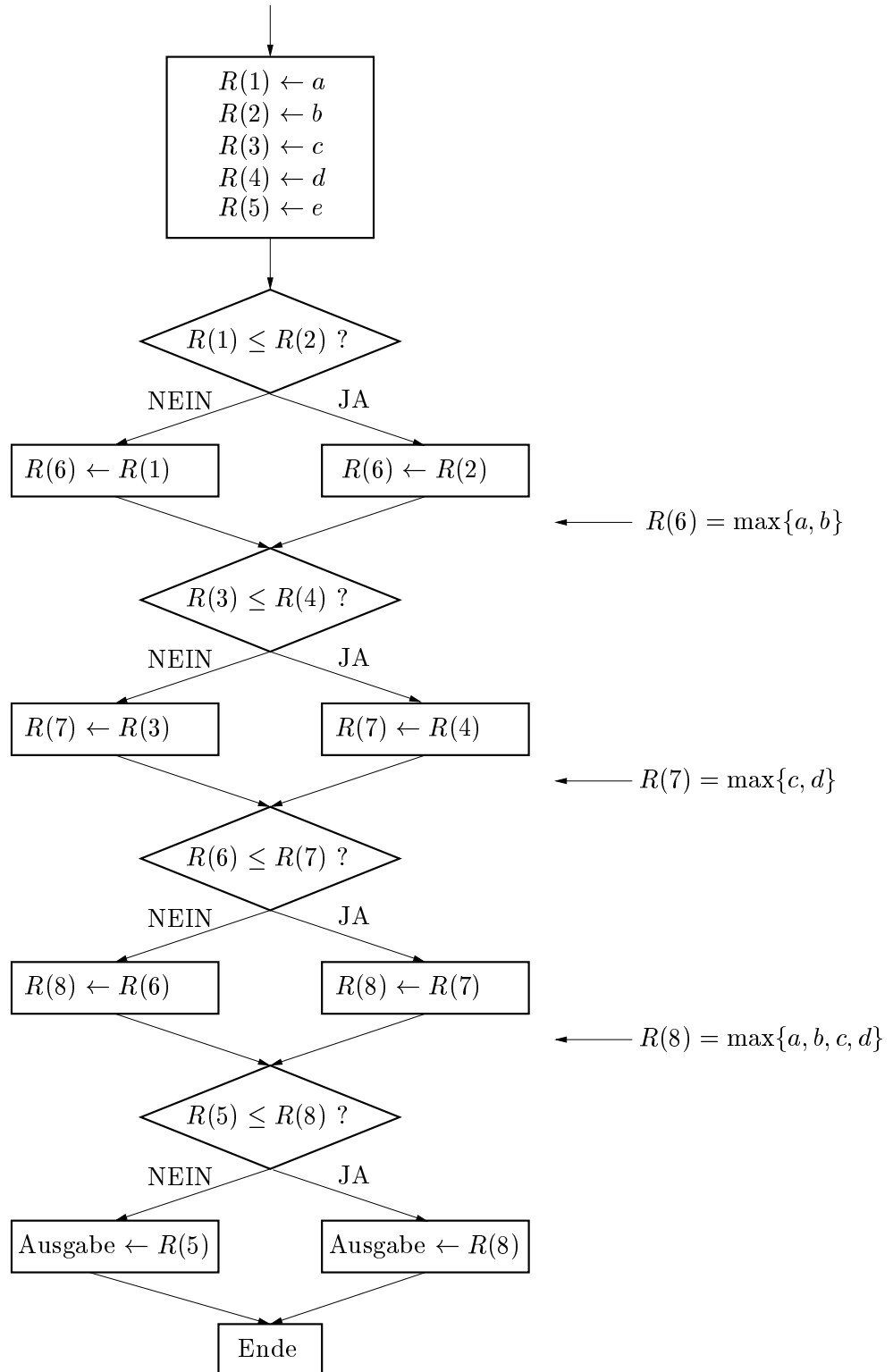
1. Lese ein in Register(1)
2. Lese ein in Register(2)
3. Lese ein in Register(3)
4. Lese ein in Register(4)
5. Register(5) \leftarrow Register(4) * Register(4)
6. Register(5) \leftarrow Register(1) * Register(5)
7. Register(6) \leftarrow Register(2) * Register(4)
8. Register(10) \leftarrow Register(5) + Register(6)
9. Register(10) \leftarrow Register(10) + Register(3)
10. Ausgabe \leftarrow Register(10)
11. Ende

In den ersten vier Zeilen liest der Algorithmus die eingegebenen Werte a, b, c, x in die Register 1 bis 4 ein. Dann berechnet er in den Zeilen 5 und 6 den Wert $a \cdot x^2$ im Register 5, indem er zunächst $x^2 = x \cdot x$ berechnet (Zeile 5) und dann das Ergebnis noch mit a multipliziert (Zeile 6). In Zeile 7 berechnet der Algorithmus dann in Register 6 den Wert $b \cdot x$. In den Zeilen 8 und 9 werden dann die Werte $a \cdot x^2$ (aus Register 5), $b \cdot x$ (aus Register 6) und c (aus Register 3) in Register 10 aufsummiert. In Zeile 10 gibt der Algorithmus den berechneten Wert aus, Zeile 11 beendet den Algorithmus.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir wollen einen Algorithmus entwerfen, der die grösste von fünf gegebenen Zahlen ausgibt. Bevor wir einen Algorithmus als Programm formal angeben, betrachten wir zunächst die

Struktur des Algorithmus in einem Flussdiagramm wie es auch in der Vorlesung verwendet wurde. Zur einfacheren Darstellung verwenden wir hier die Abkürzung $R(i)$ für Register(i).



Den durch dieses Flussdiagramm beschriebenen Algorithmus können wir nun wie folgt als Programm formulieren:

Eingabe: a, b, c, d, e

1. Lese ein in Register(1)
2. Lese ein in Register(2)
3. Lese ein in Register(3)
4. Lese ein in Register(4)
5. Lese ein in Register(5)
6. Register(9) \leftarrow 0
7. Falls Register(1) \leq Register(2), dann gehe zu Zeile 10
8. Register(6) \leftarrow Register(1) + Register(9)
9. Falls Register(9) = 0, dann gehe zu Zeile 11
10. Register(6) \leftarrow Register(2) + Register(9)
11. Falls Register(3) \leq Register(4), dann gehe zu Zeile 14
12. Register(7) \leftarrow Register(3) + Register(9)
13. Falls Register(9) = 0, dann gehe zu Zeile 15
14. Register(7) \leftarrow Register(4) + Register(9)
15. Falls Register(6) \leq Register(7), dann gehe zu Zeile 18
16. Register(8) \leftarrow Register(6) + Register(9)
17. Falls Register(9) = 0, dann gehe zu Zeile 19
18. Register(8) \leftarrow Register(7) + Register(9)
19. Falls Register(5) \leq Register(8), dann gehe zu Zeile 22
20. Ausgabe \leftarrow Register(5)
21. Falls Register(9) = 0, dann gehe zu Zeile 23
22. Ausgabe \leftarrow Register(8)
23. Ende

In den ersten fünf Zeilen werden zunächst die eingegebenen Zahlen in den Registern 1 bis 5 abgespeichert.

In Zeile 6 wird die Konstante 0 in Register 9 abgespeichert. Diese Null benötigen wir aus technischen Gründen: Zum einen lässt es unser Rechnermodell nicht zu, ohne Abfrage an eine andere Stelle des Programms zu springen; um einen solchen Sprung zu simulieren, verwenden wir die Operation Falls Register(9) = 0, dann gehe zu Zeile i . Zum

anderen ist es in unserem Rechner nicht möglich, den Wert eines Registers in ein anderes Register zu kopieren, wir simulieren dies durch die Addition der Null aus Register 9.

Zeile 7 vergleicht die Inhalte der Register 1 und 2, also die Zahlen a und b , das Maximum dieser beiden Zahlen soll in Register 6 zwischengespeichert werden, dies geschieht in den Zeilen 8 bis 10: Falls $a > b$ gilt, ist die Sprungbedingung aus Zeile 7 nicht erfüllt, also wird die Operation aus Zeile 8 ausgeführt und der Wert a von Register 1 nach Register 6 kopiert. Zeile 9 dient dann dazu, die Zeile 10 zu überspringen, in der der Wert b nach Register 6 geschrieben wird. Die Zeile 10 ist die Sprungadresse von Zeile 7, also wird sie ausgeführt, falls $a \leq b$ gilt.

Völlig analog wird in den Zeilen 11 bis 14 das Maximum von c und d in das Register 7 geschrieben, und in den Zeilen 15 bis 18 wird dann das Maximum der Inhalte der Register 6 und 7, also $\max\{\max\{a, b\}, \max\{c, d\}\} = \max\{a, b, c, d\}$, nach Register 8 geschrieben.

In den Zeilen 19 bis 22 wird dann noch der Inhalt von Register 8 mit dem Inhalt von Register 5, also mit e , verglichen und das Maximum auf die Ausgabe geschrieben. Zeile 23 beendet das Programm.

Bitte beachten Sie, dass die oben beschriebene Strategie für das Auffinden der grössten von fünf Zahlen nicht die einzig mögliche ist. Es wäre zum Beispiel auch denkbar, zunächst die Zahlen a und b zu vergleichen, dann das Maximum $\max\{a, b\}$ mit c zu vergleichen, dann $\max\{a, b, c\}$ mit d und schliesslich $\max\{a, b, c, d\}$ mit e .

Lösung zu Bonus-Aufgabe 1

Wir verwenden die Cramersche Regel (benannt nach Gabriel Cramer, 1704–1752) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems. Wir fassen die Koeffizienten in der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

zusammen; ausserdem bezeichnen wir für $i \in \{1, 2, 3\}$ als A_i diejenige Matrix, die aus A hervorgeht, wenn man die Einträge a_{1i} , a_{2i} und a_{3i} durch b_1 , b_2 bzw. b_3 ersetzt. Ausserdem sei $\det(\cdot)$ die Determinantenfunktion. Die Cramersche Regel sagt nun:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A)} \right).$$

Für den Fall, dass $\det(A) = 0$ gilt, gibt es entweder unendlich viele Lösungen oder keine. Die Determinante einer Matrix

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

können wir mit der Formel

$$\det(M) = m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22}m_{13} - m_{32}m_{23}m_{11} - m_{33}m_{21}m_{12} \quad (\star)$$

berechnen.

Wir beginnen unser Programm mit den Anweisungen zum Einlesen der Eingabe. Wir verwenden das Register mit der Nummer 7 ausschliesslich, um dort eine Null abzuspeichern, die wir zur Simulation von unbedingten Sprüngen und Kopieroperationen benötigen (vgl. Lösung zu Aufgabe 4). Das Register mit der Nummer 8 wird angeben, welche der vier beteiligten Determinanten gerade ausgerechnet wird: Wenn dort eine Null steht, so handelt es sich um $\det(A)$; steht dort die Zahl $i \in \{1, 2, 3\}$, so handelt es sich um $\det(A_i)$.

1. Lese ein in Register(11)
2. Lese ein in Register(12)
3. Lese ein in Register(13)
4. Lese ein in Register(21)
5. Lese ein in Register(22)
6. Lese ein in Register(23)
7. Lese ein in Register(31)
8. Lese ein in Register(32)
9. Lese ein in Register(33)
10. Lese ein in Register(1)
11. Lese ein in Register(2)
12. Lese ein in Register(3)
13. Register(7) \leftarrow 0
14. Register(8) \leftarrow 0

*Anweisungen zum Berechnen der Determinanten
der durch die Register 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 und 33
repräsentierten Matrix
(speichere das Ergebnis in Register 10 ab)*

38. Falls Register(10) = 0, dann gehe zu Zeile 75
39. Register(99) \leftarrow Register(10) + Register(7)

Die Aufgabe der Zeile 38 ist es, zu erkennen, ob das Gleichungssystem *singulär* ist (also keine oder unendlich viele Lösungen hat). In diesem Fall kann das Programm mit der entsprechenden Ausgabe beendet werden. Ist das Gleichungssystem nichtsingulär, so wird in Zeile 39 der berechnete Wert $\det(A)$ im Register mit der Nummer 99 abgespeichert.

Es folgen die Anweisungen zur Berechnung der Determinanten von A_1 , A_2 und A_3 . Hierzu schreiben wir ins Register mit der Nummer 8 den jeweiligen Wert (eins, zwei oder drei) hinein. Danach arrangieren wir die Inhalte der Register 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 und 33 so, dass durch sie die korrekte Matrix repräsentiert wird. Dazu ist es notwendig, die jeweils auszutauschende Spalte in weiteren Registern zwischenspeichern. Wir verwenden hierzu die Register mit den Nummern 4, 5 und 6.

40. Register(8) \leftarrow 1
41. Register(4) \leftarrow Register(11) + Register(7)
42. Register(5) \leftarrow Register(21) + Register(7)

```

43. Register(6) ← Register(31) + Register(7)
44. Register(11) ← Register(1) + Register(7)
45. Register(21) ← Register(2) + Register(7)
46. Register(31) ← Register(3) + Register(7)
47. Falls Register(7) = 0, dann gehe zu Zeile 15
48. Register(100) ← Register(10) / Register(99)
49. Register(8) ← 2
50. Register(11) ← Register(4) + Register(7)
51. Register(21) ← Register(5) + Register(7)
52. Register(31) ← Register(6) + Register(7)
53. Register(4) ← Register(12) + Register(7)
54. Register(5) ← Register(22) + Register(7)
55. Register(6) ← Register(32) + Register(7)
56. Register(12) ← Register(1) + Register(7)
57. Register(22) ← Register(2) + Register(7)
58. Register(32) ← Register(3) + Register(7)
59. Falls Register(7) = 0, dann gehe zu Zeile 15
60. Register(101) ← Register(10) / Register(99)
61. Register(8) ← 3
62. Register(12) ← Register(4) + Register(7)
63. Register(22) ← Register(5) + Register(7)
64. Register(32) ← Register(6) + Register(7)
65. Register(13) ← Register(1) + Register(7)
66. Register(23) ← Register(2) + Register(7)
67. Register(33) ← Register(3) + Register(7)
68. Falls Register(7) = 0, dann gehe zu Zeile 15
69. Register(102) ← Register(10) / Register(99)

```

Unmittelbar nach der jeweiligen Berechnung einer Determinanten sollte das Ergebnis in einem anderen Register als dem Register mit der Nummer 10 gespeichert werden, denn dieser Speicherplatz wird bei der nächsten Determinantenberechnung wiederverwendet werden. Daher wird in Zeile 48 ins Register mit der Nummer 100 der Wert $\det(A_1)/\det(A)$, in Zeile 60 ins Register mit der Nummer 101 der Wert $\det(A_2)/\det(A)$ und in Zeile 69 ins Register mit der Nummer 102 der Wert $\det(A_3)/\det(A)$ abgespeichert.

Es verbleibt, das Programmfragment anzugeben, das gemäss der Formel (★) die Determinante der Matrix berechnet, deren Einträge $m_{i,j}$ (für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$) in den Registern mit den Nummern $10 \cdot i + j$ abgespeichert sind. Das Ergebnis der Berechnung wird im Register mit der Nummer 10 abgespeichert werden; ausserdem werden wir für Zwischenergebnisse das Register mit der Nummer 20 verwenden.

```

15. Register(10) ← Register(11) * Register(22)
16. Register(10) ← Register(10) * Register(33)
17. Register(20) ← Register(12) * Register(23)

```

```

18. Register(20) ← Register(20) * Register(31)
19. Register(10) ← Register(10) + Register(20)
20. Register(20) ← Register(13) * Register(21)
21. Register(20) ← Register(20) * Register(32)
22. Register(10) ← Register(10) + Register(20)
23. Register(20) ← Register(31) * Register(22)
24. Register(20) ← Register(20) * Register(13)
25. Register(10) ← Register(10) - Register(20)
26. Register(20) ← Register(32) * Register(23)
27. Register(20) ← Register(20) * Register(11)
28. Register(10) ← Register(10) - Register(20)
29. Register(20) ← Register(33) * Register(21)
30. Register(20) ← Register(20) * Register(12)
31. Register(10) ← Register(10) - Register(20)
32. Register(20) ← 3
33. Falls Register(20) ≤ Register(8), dann gehe zu Zeile 69
34. Register(20) ← 2
35. Falls Register(20) ≤ Register(8), dann gehe zu Zeile 60
36. Register(20) ← 1
37. Falls Register(20) ≤ Register(8), dann gehe zu Zeile 48

```

In den Zeilen 32 bis 37 wird der Inhalt des Registers mit der Nummer 8 mit den möglichen Werten (eins, zwei oder drei) verglichen (die hierzu zunächst in ein Register geladen werden müssen; wir verwenden zweckmässigerweise erneut das Register mit der Nummer 20). Wenn die Anweisungen zur Berechnung der Determinanten für eine der Matrizen A_1 , A_2 oder A_3 ausgeführt wurden, so wird das Programm an der auf den jeweiligen Sprung zur Zeile 15 folgenden Zeile fortgesetzt (vgl. vorheriger Anweisungsblock). Wurde die Determinante für die ursprüngliche Matrix A berechnet, so wird die Ausführung in Zeile 38 fortgesetzt (wie erwartet).

Nach der Berechnung aller Determinanten stellt Zeile 33 sicher, dass das Programm in Zeile 69 fortgesetzt wird. Danach verbleibt, die berechneten Determinantenquotienten, die nunmehr passend in den Registern 100 (für $\det(A_1)/\det(A)$), 101 (für $\det(A_2)/\det(A)$) und 102 (für $\det(A_3)/\det(A)$) abgespeichert wurden, auszugeben und ins Register mit der Nummer 1 die Zahl 1 zu schreiben (weil es genau eine Lösung gibt).

```

70. Register(1) ← 1
71. Ausgabe ← Register(100)
72. Ausgabe ← Register(101)
73. Ausgabe ← Register(102)
74. Ende
75. Register(1) ← 0
76. Ende

```


Alternative Lösung

Alternativ können wir die Anweisungen zur Berechnung einer Determinanten auch schlicht viermal aufschreiben, mit jeweils passend ausgetauschten Registernummern.

Berechnung von $\det(A)$

13. Register(99) \leftarrow Register(11) * Register(22)
14. Register(99) \leftarrow Register(99) * Register(33)
15. Register(20) \leftarrow Register(12) * Register(23)
16. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(31)
17. Register(99) \leftarrow Register(99) + Register(20)
18. Register(20) \leftarrow Register(13) * Register(21)
19. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(32)
20. Register(99) \leftarrow Register(99) + Register(20)
21. Register(20) \leftarrow Register(31) * Register(22)
22. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(13)
23. Register(99) \leftarrow Register(99) - Register(20)
24. Register(20) \leftarrow Register(32) * Register(23)
25. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(11)
26. Register(99) \leftarrow Register(99) - Register(20)
27. Register(20) \leftarrow Register(33) * Register(21)
28. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(12)
29. Register(99) \leftarrow Register(99) - Register(20)

Berechnung von $\det(A_1)$

31. Register(100) \leftarrow Register(1) * Register(22)
32. Register(100) \leftarrow Register(100) * Register(33)
33. Register(20) \leftarrow Register(12) * Register(23)
34. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(3)
35. Register(100) \leftarrow Register(100) + Register(20)
36. Register(20) \leftarrow Register(13) * Register(2)
37. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(32)
38. Register(100) \leftarrow Register(100) + Register(20)
39. Register(20) \leftarrow Register(3) * Register(22)
40. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(13)
41. Register(100) \leftarrow Register(100) - Register(20)
42. Register(20) \leftarrow Register(32) * Register(23)
43. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(1)
44. Register(100) \leftarrow Register(100) - Register(20)
45. Register(20) \leftarrow Register(33) * Register(2)
46. Register(20) \leftarrow Register(20) * Register(12)
47. Register(100) \leftarrow Register(100) - Register(20)

Berechnung von $\det(A_2)$

```
48. Register(101) ← Register(11) * Register(2)
49. Register(101) ← Register(101) * Register(33)
50. Register(20) ← Register(1) * Register(23)
51. Register(20) ← Register(20) * Register(31)
52. Register(101) ← Register(101) + Register(20)
53. Register(20) ← Register(13) * Register(21)
54. Register(20) ← Register(20) * Register(3)
55. Register(101) ← Register(101) + Register(20)
56. Register(20) ← Register(31) * Register(2)
57. Register(20) ← Register(20) * Register(13)
58. Register(101) ← Register(101) - Register(20)
59. Register(20) ← Register(3) * Register(23)
60. Register(20) ← Register(20) * Register(11)
61. Register(101) ← Register(101) - Register(20)
62. Register(20) ← Register(33) * Register(21)
63. Register(20) ← Register(20) * Register(1)
64. Register(101) ← Register(101) - Register(20)
```

Berechnung von $\det(A_3)$

```
65. Register(102) ← Register(11) * Register(22)
66. Register(102) ← Register(102) * Register(3)
67. Register(20) ← Register(12) * Register(2)
68. Register(20) ← Register(20) * Register(31)
69. Register(102) ← Register(102) + Register(20)
70. Register(20) ← Register(1) * Register(21)
71. Register(20) ← Register(20) * Register(32)
72. Register(102) ← Register(102) + Register(20)
73. Register(20) ← Register(31) * Register(22)
74. Register(20) ← Register(20) * Register(1)
75. Register(102) ← Register(102) - Register(20)
76. Register(20) ← Register(32) * Register(2)
77. Register(20) ← Register(20) * Register(11)
78. Register(102) ← Register(102) - Register(20)
79. Register(20) ← Register(3) * Register(21)
80. Register(20) ← Register(20) * Register(12)
81. Register(102) ← Register(102) - Register(20)
```

Es verbleibt, die Eingabe einzulesen:

1. Lese ein in Register(11)
2. Lese ein in Register(12)

3. Lese ein in Register(13)
4. Lese ein in Register(21)
5. Lese ein in Register(22)
6. Lese ein in Register(23)
7. Lese ein in Register(31)
8. Lese ein in Register(32)
9. Lese ein in Register(33)
10. Lese ein in Register(1)
11. Lese ein in Register(2)
12. Lese ein in Register(3)

Der Test auf Singularität und die Ausgabe sehen nun wie folgt aus:

30. Falls Register(99) = 0, dann gehe zu Zeile 88
82. Register(100) \leftarrow Register(100) / Register(99)
82. Register(101) \leftarrow Register(101) / Register(99)
82. Register(102) \leftarrow Register(102) / Register(99)
83. Register(1) \leftarrow 1
84. Ausgabe \leftarrow Register(100)
85. Ausgabe \leftarrow Register(101)
86. Ausgabe \leftarrow Register(102)
87. Ende
88. Register(1) \leftarrow 0
89. Ende