ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Open Class – Sieben Wunder der Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben – Blatt 2

Zürich, 16. November 2005

Lösung zu Aufgabe 5

Wenn das Hilbertsche Hotel bereits voll belegt ist und 10 neue Gäste eintreffen, kann man diese unterbringen, indem man einfach alle bisherigen Gäste umziehen lässt: Der Gast aus Zimmer i wird neu im Zimmer $i + 10$ untergebracht. Danach sind die Zimmer $0, 1, \ldots, 9$ für die neu angekommenen Personen frei.

Lösung zu Aufgabe 6

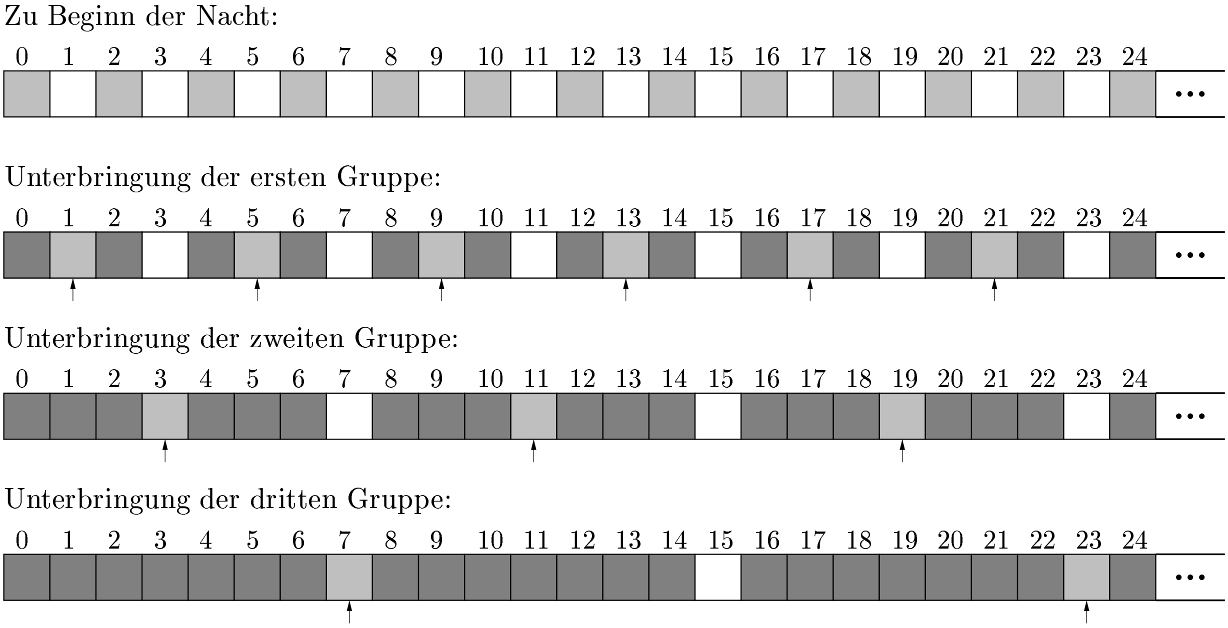
Wir suchen eine Belegungsstrategie für das Hilbertsche Hotel, in dem alle Zimmer mit geraden Nummern belegt und alle Zimmer mit ungeraden Nummern frei sind, anhand der man die Passagiere aus zwei neu angekommenen unendlichen Bussen unterbringen kann.
Hierfür weisen wir dem Passagier $B1.i$ (also dem Passagier auf Sitzplatz i im ersten der beiden Busse) das Zimmer mit der Nummer $4 \cdot i + 1$ zu, und dem Passagier $B2.i$ (also auf Sitzplatz i im zweiten Bus) das Zimmer mit der Nummer $4 \cdot i + 3$.
Damit werden die Passagiere aus dem ersten Bus in den Zimmern $1, 5, 9, 13, \ldots$ untergebracht und die Passagiere aus dem zweiten Bus in den Zimmern $3, 7, 11, 15, \ldots$
Offenbar haben alle gemäss dieser Strategie neu belegten Zimmer ungerade Nummern, waren also vorher frei, und jeder neu angekommene Passagier erhält ein eigenes Zimmer.

Lösung zu Aufgabe 7

Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, $A := [0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ bezeichne die Menge aller reellen Zahlen, die grösser oder gleich 0 und kleiner oder gleich 1 sind, $B := [0, 10] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ bezeichne die Menge aller reellen Zahlen, die grösser oder gleich 0 und kleiner oder gleich 10 sind.
Wir wollen zeigen, dass die Mengen A und B gleich gross sind, also gleich viele Elemente enthalten. Hierfür müssen wir eine Paarung finden, die jedem Element aus A ein Element aus B zuordnet und umgekehrt, so dass keines der Elemente ungepaart bleibt. Eine solche Paarung kann zum Beispiel jedem Element x aus A das Element $y = 10 \cdot x$ aus B zuordnen. Bei dieser Paarung wird dann gleichzeitig jedem Element y aus B auch ein Element aus A zugeordnet, nämlich das Element $\frac{1}{10} \cdot y$. Diese Paarung ordnet offenbar jedem Element aus A oder B eindeutig einen Partner aus der jeweils anderen Menge zu.

Lösung zu Bonus-Aufgabe 2

Hier wollen wir eine Strategie beschreiben, die das nächtliche Zügeln im Hilbertschen Hotel unnötig macht, wenn zu Beginn der Nacht alle Zimmer mit ungeraden Nummern frei sind. Die Idee ist, bei jeder Unterbringung einer neu angekommenen Gästegruppe wiederum jedes zweite freie Zimmer frei zu lassen. Dadurch ist sichergestellt, dass für die eventuell noch kommende nächste Gruppe wieder genügend viele freie Zimmer zur Verfügung stehen. Das heisst, die erste ankommende Reisegruppe wird in den Zimmern $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ untergebracht, die zweite Gruppe in den Zimmern $3, 11, 19, 27, \ldots$, die dritte Gruppe in den Zimmern $7, 23, 39, 55, \ldots$ und so weiter. Diese Belegungsstrategie ist in der folgenden Abbildung noch einmal veranschaulicht, dabei sind die bereits belegten Zimmer grau dargestellt.



Genauer gesagt verwenden wir zur Unterbringung der k-ten ankommenden Reisegruppe, die wir in dem leeren Hotel unterbringen könnten, folgendes Verfahren: Jeder Gast, der gemäss einer für das leere Hotel möglichen Strategie Zimmer i erhielte, wird in Zimmer $Z_k(i) = 2^k \cdot (2i+1) - 1$ untergebracht.
Wir bezeichnen die Menge aller potentiell für die k-te Reisegruppe verwendeten Zimmernummern mit Z_k, also $Z_k := \{Z_k(i) \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$.
Um die Gültigkeit dieses Verfahrens nachzuweisen, müssen wir einsehen, dass

(a) die Menge Z_k für jedes k gross genug ist, also genauso viele Elemente enthält wie die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen, und

(b) sich die Mengen Z_k und Z_l für $k \neq l$ nicht überschneiden.

Um die Behauptung (a) zu beweisen, müssen wir eine Paarung angeben, die jeder Zahl $i \in \mathbb{N}$ eindeutig ein Element aus Z_k zuordnet; dies kann offenbar das Element $Z_k(i) = 2^k \cdot (2i+1) - 1$ sein.

Wir zeigen nun noch mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass sich Z_k und Z_l für beliebige Werte k und l mit $k \neq l$ nicht überschneiden: Wenn wir das Gegenteil annehmen, dann existieren $Z_k(i)$ und $Z_l(j)$, so dass $Z_k(i) = Z_l(j)$, also

$$2^k \cdot (2i+1) - 1 = 2^l \cdot (2j+1) - 1$$

und somit

$$2^k \cdot (2i+1) = 2^l \cdot (2j+1). \tag{1}$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $l > k$ gilt. Damit können wir die Gleichung (1) durch 2^k teilen und erhalten:

$$2i+1 = 2^{l-k} \cdot (2j+1)$$

oder äquivalent

$$1 = 2^{l-k} \cdot (2j+1) - 2i. \tag{2}$$

Da $l > k$ gilt, sind beide Terme auf der rechten Seite von Gleichung (2) gerade, was uns den gewünschten Widerspruch liefert. Damit haben wir auch die Gültigkeit von Behauptung (b) nachgewiesen.