ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

**Open Class – Sieben Wunder der Informatik**

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

# Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben

Zürich, 30. Oktober 2007

## Lösung zu Aufgabe 21

Wir wählen

$$\alpha := \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{1}{2}$$

und erhalten die Superposition

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot |0\rangle + \frac{1}{2} \cdot |1\rangle \quad .$$

Offensichtlich ist

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad .$$

Damit sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

## Lösung zu Aufgabe 22

Im allgemeinen sieht eine solche Superposition wie folgt aus:

$$\alpha_{000} \cdot |000\rangle + \alpha_{001} \cdot |001\rangle + \alpha_{010} \cdot |010\rangle + \alpha_{011} \cdot |011\rangle + \\ \alpha_{100} \cdot |100\rangle + \alpha_{101} \cdot |101\rangle + \alpha_{110} \cdot |110\rangle + \alpha_{111} \cdot |111\rangle \quad ,$$

wobei gilt:

$$|\alpha_{000}|^2 + |\alpha_{001}|^2 + |\alpha_{010}|^2 + |\alpha_{011}|^2 + |\alpha_{100}|^2 + |\alpha_{101}|^2 + |\alpha_{110}|^2 + |\alpha_{111}|^2 = 1 \quad .$$

(a) Wenn alle acht Inhalte mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten sollen, so beträgt für jeden einzelnen die Wahrscheinlichkeit offenbar $\frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2$.

Eine mögliche Superposition ist also z. B.

$$\frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |000\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |001\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |010\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |011\rangle + \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |100\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |101\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |110\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot |111\rangle \quad .$$

(b) Neben den Inhalten $|111\rangle$ und $|000\rangle$ gibt es noch sechs weitere mögliche Inhalte. Wenn mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der Inhalt $|000\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ der Inhalt $|111\rangle$ gemessen werden wird, verbleibt die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$, die sich gleichmässig auf diese sechs weiteren Inhalte verteilen soll. Also wird jeder von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{24} = \frac{6}{144}$ gemessen werden. Hieraus ergibt sich z. B. die Superposition

$$\frac{1}{2} \cdot |000\rangle + \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot |001\rangle + \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot |010\rangle + \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot |011\rangle + \\ \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot |100\rangle + \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot |101\rangle + \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot |110\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |111\rangle \quad .$$

## Lösung zu Aufgabe 23

Wenn für eine Superposition

$$\alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$$

(wobei wir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ annehmen) verlangen, dass nicht nur

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad ,$$

sondern auch

$$\alpha^2 = \beta^2$$

gilt, die Auftretenswahrscheinlichkeiten also gleich sind, so erhalten wir

$$\alpha, \beta \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

woraus sich die beiden weiteren Superpositionen

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle \text{ und}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$$

ergeben.

## Lösung zu Bonus-Aufgabe 8

Die genannte Eigenschaft heisst *Orthogonalität* der Matrix $H_2$. Wenn wir auch nicht-reelle Amplituden $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zulassen, so lautet die Forderung, die wir an die Amplituden stellen:

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} + \beta \cdot \overline{\beta} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma \cdot \overline{\gamma} + \delta \cdot \overline{\delta} = 1$$

Anstatt zu quadrieren, müssen die Werte also mit ihrem komplex-konjugierten Wert multipliziert werden. Die sich hieraus ergebende Forderung an eine Matrix ist, dass sie *unitär* ist.

Wir verzichten hier auf das Rechnen mit nicht-reellen Zahlen. Durch Einsetzen der Multiplikationsvorschrift erhalten wir:

$$\begin{aligned}\gamma &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \beta \quad \text{und} \\ \delta &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \beta\end{aligned}$$

Für den Wert $\gamma^2 + \delta^2$ erhalten wir also:

$$\begin{aligned}\gamma^2 + \delta^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \beta\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \beta\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \quad .\end{aligned}$$

Da wir schon wissen, dass $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, so ist offenbar auch $\gamma^2 + \delta^2 = 1$ erfüllt.
Auf dieselbe Art und Weise kann man auch nachrechnen, dass $H_2$ nicht nur orthogonal, sondern auch unitär ist.

## Lösung zu Bonus-Aufgabe 9

Wir nennen $M$ auch die *Inverse* von $H_2$ und bezeichnen sie mit $H_2^{-1}$. Die hier gesuchte Matrix $M$ ist identisch mit $H_2$. Dass $H_2 = H_2^{-1}$ gilt, $H_2$ also *selbstinvers* ist, rechnet man leicht nach:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ erhalten wir also

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$